令和５年度入学試験問題

数学

（教員養成課程）

注意事項

1　試験開始の合図があるまでは，この問題冊子を開かないこと。

2　問題冊子は表紙を含めて１～３ページです。

3　解答用紙は３枚，計算用紙は１枚です。

4　解答は指定された解答用紙に記入すること。**裏面には何も書かないこと。**

5　受験番号は解答用紙の指定欄に記入すること。

6　解答は，答えだけではなく，計算の過程や説明も書くこと。

7　解答用紙のみを提出し，問題冊子・計算用紙は試験終了後，持ち帰ること。**なお，いかなる理由があっても解答用紙以外（計算用紙など）は受理しません。**

8　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等により交換を必要とする場合は，手を挙げて監督者に知らせること。

問題 1 (60 点)

次の問いに答えよ。

(1) 3 辺の長さが $t,\ t+1,\ t+2$ である三角形が存在するような実数 t の値の範囲を求めよ。

以下では, (1) の三角形を $\triangle \mathrm{ABC}$ とし, $\mathrm{BC}=t,\ \mathrm{CA}=t+1,\ \mathrm{AB}=t+2$ とする。

(2) $\cos\angle \mathrm{C}$ を t を用いて表せ。

(3) $\cos\angle \mathrm{C}$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(4) $\angle \mathrm{C}=120^\circ$ となるような t の値と, そのときの $\triangle \mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

問題 2 (70 点)

x についての 3 次関数 $f(x)$ が条件

$$xf'(x)=3f(x)+2x, \qquad f(1)=1$$

を満たすとき, 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x} f(t)\,dt$ を求めよ。

(3) (2) の $g(x)$ について, 方程式 $g(x)=k$ の異なる実数解の個数を, 定数 k の値により場合分けして答えよ。

問題 3 (70 点)

$r > 1$ とし, $\mathrm{OA} = 1$, $\mathrm{OB} = r$, $\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$ の直角三角形 OAB を考える。辺 OB 上に $\mathrm{OM} = 1$ である点 M をとる。辺 OA を $s : 1 - s$ $(0 < s < 1)$ に内分する点を P とし, 辺 AB を $t : 1 - t$ $(0 < t < 1)$ に内分する点を Q とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき, 次の問いに答えよ。

(1) 一般に, $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ のとき,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

であることを証明せよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を r, s, t, $\vec{a}$, $\vec{b}$ のうち必要なものを用いて表せ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|^2$ と $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ を r, s, t のうち必要なものを用いて表せ。

(4) $\angle\mathrm{MPQ} = 90^\circ$ のとき, t を r, s を用いて表せ。

(5) $\angle\mathrm{MPQ} = 90^\circ$ とする。このとき,

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PQ}} > 1$$

であることを示せ。さらに, $\triangle\mathrm{PQM} \backsim \triangle\mathrm{OAB}$ となる場合に s を r を用いて表せ。