問題1 （配点60点）

---

(1) の解答例

t は辺の長さを表すので, $t > 0$ でなければならない。
三角形の成立条件より, 最大の辺の長さ $t+2$ が他の2辺の長さの和より小さければよいので,
$t+(t+1) > t+2$ を整理して $t > 1$ を得る。

(2) の解答例

余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{C} = \frac{\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AB}^2}{2\,\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}} = \frac{(t+1)^2+t^2-(t+2)^2}{2t(t+1)} = \frac{t^2-2t-3}{2t(t+1)} = \frac{(t-3)(t+1)}{2t(t+1)} = \frac{t-3}{2t}$$

となる。

(3) の解答例

$t > 1$ のとき $\dfrac{3}{2t}$ は区間 $0 < \dfrac{3}{2t} < \dfrac{3}{2}$ の範囲を動くので, $\cos\angle\mathrm{C} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2t}$ のとり得る範囲は
$\dfrac{1}{2} > \cos\angle\mathrm{C} > \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} = -1$ となる。

(4) の解答例

$\angle\mathrm{C} = 120^\circ$ のとき, $\cos\angle\mathrm{C} = -\dfrac{1}{2}$ であるから, $\dfrac{t-3}{2t} = -\dfrac{1}{2}$ より $t = \dfrac{3}{2}$ である。
また, このとき $\sin\angle\mathrm{C} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから, $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\sin\angle\mathrm{C} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}+1\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{16}$$

となる。

問題２（配点70点）

(1) の解答例

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ とおくと, 条件より

$$x(3ax^2 + 2bx + c) = 3(ax^3 + bx^2 + cx + d) + 2x,$$

$$\text{すなわち,}\ 3ax^3 + 2bx^2 + cx = 3ax^3 + 3bx^2 + (3c + 2)x + 3d$$

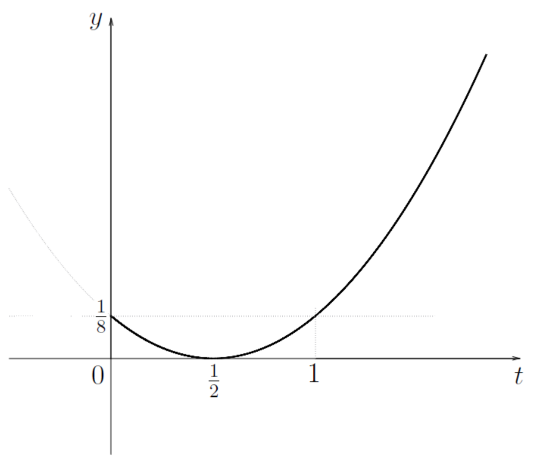
となり, 両辺の係数を比較して $b = 0,\ d = 0$, および $c = 3c + 2$ より $c = -1$, したがって $f(x) = ax^3 - x$ とおけるが, $f(1) = 1$ より $a - 1 = 1$, よって $a = 2$ となり, $f(x) = 2x^3 - x$ を得る。

(2) の解答例

$$g(x) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x} (2t^3 - t)dt = \left[\frac{2t^4}{4} - \frac{t^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x} = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\} = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}$$

(3) の解答例 (その 1)

$x^2 = t$ とおくと $g(x) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2$ となり, $y = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2$ のグラフをかけば, $t \geqq 0$ に注意して, 右図のようになる。



- $k < 0$ のとき, 直線 $y = k$ はグラフと交わらないので, $g(x) = k$ は実数解をもたない。
- $k = 0$ のとき, $y = k$ は $t = \frac{1}{2}$ でグラフと接するので, $g(x) = k$ の実数解は $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ の 2 個となる。
- $0 < k < \frac{1}{8}$ のとき, $y = k$ は $t = t_1,\ t_2 > 0$ でグラフと交わるので, $g(x) = k$ の解は $x = \pm\sqrt{t_1},\ \pm\sqrt{t_2}$ の 4 個となる。
- $k = \frac{1}{8}$ のとき, $y = k$ は $t = 0,\ 1$ でグラフと交わるので, $g(x) = k$ の解は $x = 0,\ \pm 1$ の 3 個となる。
- $k > \frac{1}{8}$ のとき, $y = k$ は $t > 0$ の 1ヵ所でグラフと交わるので, $g(x) = k$ の解は $x = \pm\sqrt{t}$ の 2 個となる。

(3) の解答例 (その 2)

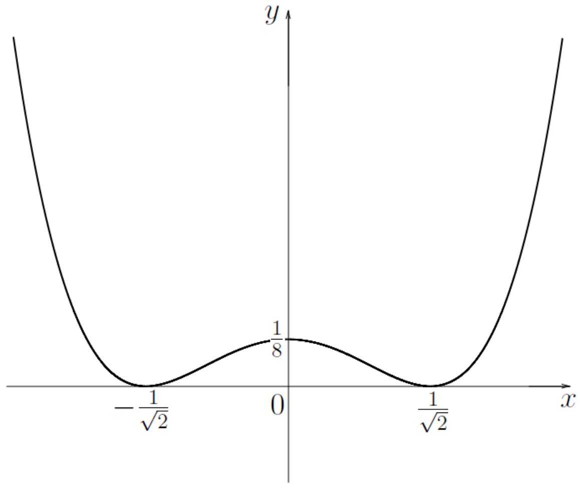
$g'(x) = 2x^3 - x = x\left(\sqrt{2}x - 1\right)\left(\sqrt{2}x + 1\right)$ より, $g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0 (極小)	↗	$\frac{1}{8}$ (極大)	↘	0 (極小)	↗

のようになる。したがって, $y = g(x)$ のグラフは右図のようになる。
よって, $y = g(x)$ のグラフと $y = k$ との共有点の個数, すなわち $g(x) = k$ の異なる実数解の個数は

- $k < 0$ のとき 0 個,
- $k = 0$ のとき 2 個,
- $0 < k < \frac{1}{8}$ のとき 4 個,
- $k = \frac{1}{8}$ のとき 3 個,
- $k > \frac{1}{8}$ のとき 2 個

となる。



問題3（配点70点）

---

(1) の解答例

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角を θ とする。

$\theta = 90^\circ$ のとき, $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos 90^\circ = 0$ となる。

逆に, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ のとき, $\cos\theta = 0$ となるから, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において $\theta = 90^\circ$ である。

(2) の解答例

$\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{1}{r}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s\vec{a} - \frac{1}{r}\vec{b}$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = t\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$ となる。また, $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1-s)\vec{a}$ である。

ゆえに, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (1-s-t)\vec{a} + t\vec{b}$ となる。

(3) の解答例

$\triangle\mathrm{OMP}$ は $\mathrm{OM} = 1$, $\mathrm{OP} = s$, $\angle\mathrm{MOP} = 90^\circ$ の直角三角形なので, 三平方の定理より $\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|^2 = 1 + s^2$ となる。

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \\ &= (1-s-t)^2\left|\vec{a}\right|^2 + 2t(1-s-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2\left|\vec{b}\right| \\ &= (1-s-t)^2 + t^2r^2 \quad \left(\text{条件から } \left|\vec{a}\right|^2 = 1,\ \left|\vec{b}\right|^2 = r^2,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 0\right)\end{aligned}$$

となる。

(4) の解答例

$\overrightarrow{\mathrm{MP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$ である。ここで,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \left(s\vec{a} - \frac{1}{r}\vec{b}\right)\cdot\left((1-s-t)\vec{a} + t\vec{b}\right) \\ &= s(1-s-t)\left|\vec{a}\right|^2 + st\,\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{r}(1-s-t)\vec{b}\cdot\vec{a} - \frac{t}{r}\left|\vec{b}\right|^2 \\ &= s(1-s-t) - \frac{t}{r}\cdot r^2 \quad \left(\text{条件から } \left|\vec{a}\right|^2 = 1,\ \left|\vec{b}\right|^2 = r^2,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = 0\right) \\ &= s(1-s-t) - rt \\ &= s(1-s) - (s+r)t\end{aligned}$$

となり, $t = \dfrac{s(1-s)}{s+r}$ を得る。

(5) の解答例

$$\begin{aligned}t = \frac{s(1-s)}{s+r} \text{ のとき, } \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 &= (1-s-t)^2 + t^2r^2 \\ &= \left\{\frac{r(1-s)}{s+r}\right\}^2 + \left\{\frac{rs(1-s)}{s+r}\right\}^2 \\ &= (1+s^2)\left\{\frac{r(1-s)}{(s+r)}\right\}^2 \\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|^2\left\{\frac{r(1-s)}{(s+r)}\right\}^2 \text{ であり,}\end{aligned}$$

$(s+r) - r(1-s) = s + rs > 0$ と $r(1-s) > 0$ より $0 < \dfrac{r(1-s)}{(s+r)} < 1$ なので,

$\dfrac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PQ}} = \dfrac{s+r}{r(1-s)} > 1$ を得る。

$\triangle\mathrm{PQM} \backsim \triangle\mathrm{OAB}$ となるには, $\dfrac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PQ}} = \dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}$, すなわち $\dfrac{s+r}{r(1-s)} = r$ を満たせばよい。

左辺の分母を払って $s + r = r^2(1-s)$, よって $s = \dfrac{r^2 - r}{1 + r^2}$ である。