問題1（配点70点）

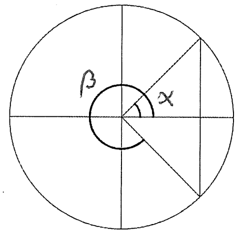
出題の意図・採点基準

三角関数について，その値とグラフに関する理解は十分か，また倍角の公式の理解と応用ができるかなどを問う。

各問いの採点においては, 計算や論証の過程, 記述が数学的に正しく題意に沿っていれば, 完全な解答でなくとも適宜部分点を与えて評価する。なお, 以下に示す解答例はあくまで一例にすぎない。

(1) の解答例

$\cos\alpha = \cos\beta$ かつ $\alpha \neq \beta$ ならば，$\beta = 2\pi - \alpha$ であることを示せばよい。$0 < \alpha,\ \beta < 2\pi$ で $\alpha \neq \beta$ であるとき，条件 $\cos\alpha = \cos\beta$ を満たす α と β の関係を図示すると下の図のようになる。したがって，$\beta = 2\pi - \alpha$ であることが分かる。



(2) の解答例

倍角の公式より，次のように計算できる。

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

(3) の解答例

(2) より $\cos\alpha = \cos 4\alpha$ かつ $0 < \alpha, 4\alpha < 2\pi$ である。(1) より $\alpha = 4\alpha$ または $\alpha + 4\alpha = 2\pi$ であるが，前者ならば $\alpha = 0$ となり不適。したがって，$5\alpha = 2\pi$ となり，$\alpha = \dfrac{2\pi}{5}$ である。

(4) の解答例

$\cos\dfrac{\pi}{4} < \cos\beta$，すなわち $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ を示せばよい。$2 < \sqrt{5}$ より

$$(1+\sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5} > 10 > 8 = (2\sqrt{2})^2$$

である。よって $2\sqrt{2} < 1 + \sqrt{5}$ である。

問題2（配点60点）

出題の意図・採点基準

基礎的な計算ができるかを問う。二次関数 $y=x^2$ について，接線と接点や，グラフと x 軸と接線で囲まれた図形の面積を求めることができるか，また，数列の和を求めることができるかなどを問う。(2) で求める三角形の面積の和が (3) の面積 (定積分) の近似を与えることに気付くことは有益である。

各問いの採点においては, 計算や論証の過程, 記述が数学的に正しく題意に沿っていれば, 完全な解答でなくとも適宜部分点を与えて評価する。なお, 以下に示す解答例はあくまで一例にすぎない。

(1) の解答例

接線 ℓ の方程式を $y=k(x-t)\ \ (k>0)$ とおく。ℓ と $y=x^2$ が接することから，y を消去した方程式 $x^2-kx+kt=0$ が重解をもつので，$D=k^2-4kt=0$ より $k=0$ または $4t$ となり，$k>0$ だから $k=4t$ である。よって接点Pの座標は，$x^2-4tx+4t^2=0$ を解いて，$x=2t$，このとき $y=4t^2$ となり，$\mathrm{P}(2t,4t^2)$ である。

(2) の解答例

$t=\dfrac{k}{n}$，$h=\dfrac{1}{n}$ とするとき，三角形ABPの面積 S_k は

$$S_k=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\times\frac{4k^2}{n^2}=\frac{2k^2}{n^3}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}S_k&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2}{n^3}\\&=\frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=\frac{2}{n^3}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\&=\frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}\end{aligned}$$

となる。

(3) の解答例

$t=1$ のとき，$\mathrm{P}(2,4)$ である。直線 $x=2$, x 軸，および $y=4(x-1)$ で囲まれる直角三角形の面積は 2 であるから，求める面積は

$$\int_0^2 x^2dx-2=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2-2=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$$

である。

問題3（配点70点）

出題の意図・採点基準

二つの円の位置関係 ((1)) や円と直線の関係 ((2), (3)) を, 座標を介して円や直線の方程式を用いて明らかにすることができるかを問う。

各問いの採点においては, 計算や論証の過程, 記述が数学的に正しく題意に沿っていれば, 完全な解答でなくとも適宜部分点を与えて評価する。なお, 以下に示す解答例はあくまで一例にすぎない。

(1) の解答例

円 C の中心 $\mathrm{A}(0,1)$ と円 C' の中心 $\mathrm{P}(t,0)$ の距離は $\mathrm{AP}=\sqrt{t^2+1}$ である。

2円の中心間の距離が, 半径の差より大きく和より小さいとき, 2円の共有点は2個となる。

$2-1<\mathrm{AP}<2+1$ より, $0<t<2\sqrt{2}$ である。

(2) の解答例

直線 PQ_2 が円 C と接するとき, 直線 PQ_1 も円 C と接するので, $\mathrm{Q}_1(0,0)$, $\mathrm{P}(2,0)$ である。

直線 PQ_2 の方程式を $y=a(x-2)$ $(a\neq 0)$ とし, $\mathrm{Q}_2\bigl(q,a(q-2)\bigr)$ とする。

$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\perp\mathrm{AP}$ より, $a(q-2)=2q$ である。$q\neq 0$ としてよい。

$\mathrm{PQ}_2=2$ より, $(q-2)^2+4q^2=4$, $\therefore q=\dfrac{4}{5}$ となる。

よって, $a=\dfrac{2\times\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}-2}=-\dfrac{4}{3}$, $\mathrm{Q}_2\Bigl(\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5}\Bigr)$ を得る。

(2) の解答例 (別解)

直線 PQ_2 が円 C と接するとき, 直線 PQ_1 も円 C と接するので, $\mathrm{Q}_1(0,0)$, $\mathrm{P}(2,0)$ である。

点 Q_2 の座標を (x,y) とする。$x\neq 0$ である。

点 Q_2 は円 C の上にあるので, $x^2+(y-1)^2=1$ $\cdots$① である。

$\mathrm{PQ}_2=2$ より, $(x-2)^2+y^2=4$ $\cdots$② である。

① と ② から x^2 と y^2 を消去して, $y=2x$ を得る。

① または ② に $y=2x$ を代入すれば, $x(5x-4)=0$ となる。

よって, $(x,y)=\Bigl(\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5}\Bigr)$ を得る。直線 PQ_2 の傾きは, $\dfrac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{5}-2}=-\dfrac{4}{3}$ となる。

(3) の解答例

$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2=2$ と $\mathrm{PQ}_1=\mathrm{PQ}_2=2$ より, $\triangle\mathrm{Q}_1\mathrm{PQ}_2$ は正三角形となり, $\mathrm{AP}=\sqrt{3}$ である。

原点を O とする。$\triangle\mathrm{OAP}$ は直角三角形なので,

三平方の定理から $\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{OA}^2}=\sqrt{2}$, したがって $\mathrm{P}(\sqrt{2},0)$ となる。

$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\perp\mathrm{AP}$ より, 直線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の方程式は $y=\sqrt{2}x+1$ である。

円 C の方程式 $x^2+(y-1)^2=1$ に代入して, $x^2+2x^2=1$, したがって $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。

よって, $\mathrm{Q}_1\Bigl(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\Bigr)$, $\mathrm{Q}_2\Bigl(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\Bigr)$ となる。